MATEMÁTICAS II

Documento I

- Comentarios generales
- Criterios de evaluación
- Modelo de prueba

Documento II

- Introducción
- Comentarios generales
- Propuesta por Bloques
  - Objetivos.
  - Conceptos, procedimientos y resultados.
  - Algunas observaciones y orientaciones.
  - Notas.

Documento I

Comentarios generales

La nueva prueba de acceso, que se implantará en 2010, está regulada por las normas que se citan:

1. **BOE. Real Decreto 1467/2007 de 2 de Noviembre.**
   (Estructura del Bachillerato y Enseñanzas mínimas)
2. **BOE. Real Decreto 1892/2008 de 14 de Noviembre.**
   (Condiciones de acceso a las Enseñanzas universitarias)
3. **BOPV. Decreto 23/2009 de 3 de Febrero.**
   (Currículo de Bachillerato)
4. **Normativa interna de la UPV/EHU**

En el tercer documento citado se encuentra el currículo de la asignatura Matemáticas II, que se agrupa en cuatro grandes bloques de contenido:

- **Contenidos comunes (TIC, Resolución de problemas y Actitudes).**
- **Algebra.**
- **Geometría.**
- **Análisis.**

Respecto al currículo anterior las principales novedades son dos: desaparece oficialmente el bloque de Estadística y Probabilidad y hay una mayor insistencia en la adquisición de competencias.
Una de las novedades de la prueba es, que por su normativa, deben presentarse dos opciones cerradas A y B para que el alumno elija una de ellas y desarrolle todos los ejercicios de la opción elegida.
El examen constará por tanto de dos opciones cerradas A y B, y cada una de ellas de cinco ejercicios que serán valorados entre 0 y 2 puntos.
La distribución temática de los cinco ejercicios de cada opción seguirá el mismo esquema que hasta ahora, reflejando la estructura de los bloques que componen la asignatura y citados antes.

Un ejercicio será de la parte algebraica (sistemas, matrices, determinantes, etc.), otro ejercicio será del apartado geométrico del programa (geometría del espacio, distancias, etc.), un tercer ejercicio estará relacionado con las cuestiones de cálculo diferencial (derivadas y sus aplicaciones), habrá otro ejercicio relativo al cálculo integral (y sus aplicaciones) y finalmente otro ejercicio relacionado con el apartado de resolución de problemas.

En el documento II se realizan mayores precisiones sobre cada uno de estos bloques, en lo relacionado con los siguientes elementos:

- Objetivos.
- Conceptos, procedimientos y resultados.
- Observaciones metodológicas.

Criterios de evaluación

1. La prueba se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos
2. Cada uno de los cinco ejercicios, de los que consta la prueba, tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración los errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará positivamente la buena presentación de la prueba.

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

MATEMÁTICAS II (Modelo de examen)

Nota: *Hay que elegir la opción A o la opción B y contestar a todos los ejercicios de la opción elegida. Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos*

OPCION A

EjercicioA.1. Estudiar la compatibilidad del sistema de ecuaciones lineales que sigue, en función de α

$$S = \begin{cases} x - y + 2\,z = 4 \\ 3\,x + 2\,y + 3\,z = 1 \\ 4\,x + y + \alpha\,z = \alpha \end{cases}$$

Resolver el sistema en el caso de indeterminación.

EjercicioA.2. Sean A y B los puntos del espacio, de coordenadas

$$A = (3, 4, 1 + 2a), \ \ B = (-3, 0, 1 - 2a)$$

Se sabe que dichos puntos son simétricos respecto a un plano P. Hallar de forma razonada la ecuación de dicho plano.

EjercicioA.3.
De una función polinómica del tipo $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ se sabe que tiene un extremo para $x = 0$ y otro para $x = 1$. ¿Cuáles de los coeficientes A, B y C pueden calcularse con esos datos? Razonar la respuesta.

EjercicioA.4. Sea R el rectángulo del plano con vértices en los puntos

$$V_1 = (0, 0), \ \ V_2 = (3, 0), \ \ V_3 = (3, 9), \ \ V_4 = (0, 9)$$

Demostrar que para todo valor de A la curva de ecuación $y = A\,x^2 + (3 - 3\,A)x$ pasa por los vértices V_1 y V_3 y divide al rectángulo en dos regiones.
Calcular el área de dichas regiones y encontrar el valor de A para que la región situada por encima de la curva tenga un área doble que la situada por debajo de la curva.

EjercicioA.5. En el plano se considera el cuadrado de vértices

$$V_1 = (5, 0), \ \ V_2 = (5, 3), \ \ V_3 = (8, 3), \ \ V_4 = (8, 0)$$

De todas las rectas que pasan por el origen de coordenadas se elige la recta que divide al cuadrado en dos zonas de igual área. Dibujar un esquema y hallar de forma razonada la pendiente de dicha recta.

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

MATEMÁTICAS II (Modelo de examen)

Nota: *Hay que elegir la opción A o la opción B y contestar a todos los ejercicios de la opción elegida. Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos*

Opcion B

EjercicioB.1. Discutir la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones

$$S = \begin{cases} 3\,x - 2\,y + 2\,z = 2\,\alpha + 1 \\ x + y - z = 1 \\ 4\,x - 2\,y + (\alpha - 1)z = \alpha + 1 \end{cases}$$

en función del parámetro α.

EjercicioB.2. Sean A y B los puntos del espacio, de coordenadas

$$A = (2, 2, 1), \quad B = (4, u, v)$$

Se sabe que dichos puntos son simétricos respecto del plano P de ecuación

$$2x - y + z + D = 0$$

Hallar de forma razonada los valores de u, v y D.

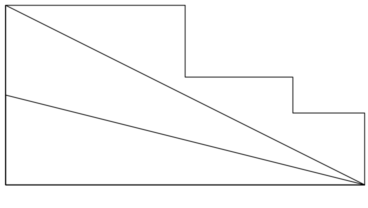
EjercicioB.3. Sean p y q dos números positivos cuya suma vale 20.
Hallar razonadamente el valor de p y q para que el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo.

EjercicioB.4. Se considera el recinto del plano limitado por las rectas

$$y = 4x, \quad y = 8 - 4x,$$

y la curva $y = 2x - x^2$ y situado en el primer cuadrante. Trazar un esquema gráfico del recinto y calcular su área mediante cálculo integral

EjercicioB.5. En la figura se muestra una zona de jardines compuesta por tres cuadrados de lados 50, 30 y 20 metros respectivamente. Se desea plantar de tulipanes la zona situada por encima de la recta que une el vértice superior izquierdo del primer cuadrado con el inferior derecho del tercer cuadrado, y de rosas la zona entre dicha recta y la que une el punto medio del lado izquierdo del primer cuadrado con el vértice inferior derecho del tercer cuadrado. (Ver la figura). En la zona restante se plantan jazmines. Contestar razonadamente a la siguiente pregunta.¿Qué superficie es mayor, la plantada de rosas o la plantada de tulipanes?



Documento II

Introducción

En este documento se presenta una propuesta de planificación de la asignatura Matemáticas II correspondiente al segundo curso del Bachillerato.

Para entender en profundidad la propuesta hay que tener presente los planteamientos expuestos en los siguientes Decretos:

- REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre (BOE 6/11/2008), por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

- DECRETO 23/2009, de 3 de febrero (BOPV, 27, 2, 2009), por el que se establece el currículo de Bachillerato, y en particular la asignatura de Matemáticas II.

- REAL DECRETO 1892/2008, de 14 de noviembre (BOE 24/11/2008) por el que se regulan las condiciones para el acceso a las enseñanzas universitarias oficiales de grado y los procedimientos de admisión a las universidades públicas españolas.

De acuerdo a los mencionados Decretos, la asignatura se agrupa en cuatro grandes bloques de contenido:

- **CONTENIDOS COMUNES (TIC, Resolución de Problemas y Actitudes)**
- **ÁLGEBRA**
- **GEOMETRÍA**
- **ANÁLISIS**

En esta propuesta se trata de precisar el contenido de los diversos apartados de cada bloque. Para ello se presenta una planificación a la vez realista y en consonancia con las exigencias para aquellos alumnos y alumnas que opten por acudir a las pruebas de acceso a la Universidad

Se detallan bloque a bloque los siguientes elementos:

a. **Objetivos.**
b. **Conceptos, procedimientos y resultados.**
c. **Algunas observaciones y orientaciones de carácter metodológico y de contenido.**
d. **Notas.**

Comentarios generales:

1.- En cuanto a los tiempos sugeridos para la planificación de la asignatura Matemáticas II, se ha calculado un total de 26 semanas de las cuales se han descontado 2 para evaluaciones y otras actividades por lo que quedan 24 semanas lectivas de cuatro horas cada una. A continuación se sugiere una posible temporalización:

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	3 semanas
ÁLGEBRA	6 semanas
GEOMETRÍA	5 semanas
ANÁLISIS	10 semanas

2.- No hay que olvidar que el desarrollo planteado del Currículo de Matemáticas II (como el de todas las asignaturas) se realiza desde la adquisición de una serie de competencias(*); sin embargo, la prueba de acceso no puede entrar a fondo en ese aspecto, ya que una prueba basada exclusivamente en competencias requeriría de unos tiempos y unas maneras de trabajar aún no suficientemente maduras. No obstante hay varios aspectos competenciales que sí serán objeto de evaluación.

3.- Aunque los citados Decretos inciden de manera muy especial en dos aspectos: *El uso de las Tecnologías de La Información y de la Comunicación y la Resolución de Problemas*.
El primero de los aspectos no se puede proponer, en toda su extensión en la prueba de acceso, Pero, del mismo modo, sugerimos que la utilización inteligente de diversos programas y asistentes matemáticos son recursos de primer orden y conviene no olvidarlos en la práctica normal del aula.
El segundo -la Resolución de Problemas- será objeto de evaluación con las acotaciones y planteamientos que se exponen en el presente documento.

4.- Las definiciones formales, las demostraciones (reducción al absurdo, contraejemplos) y los encadenamientos lógicos (implicación, equivalencia) dan validez a las intuiciones y confieren solidez a las técnicas aplicadas. Sin embargo, hay que tener un cierto equilibrio ya que éste es el primer momento en que el alumnado se enfrenta con cierta seriedad al lenguaje formal. En definitiva, el rigor no debe desfigurar la esencia de las ideas fundamentales.

(*) Se entiende por competencia matemática la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. 3 semanas

Objetivos. Los alumnos deben ser capaces de:

- Enfrentarse con enunciados más abiertos que los ejercicios.
- Formular conjeturas y probarlas en su caso.
- Conocer y usar algunas estrategias concretas de cara a resolver problemas.

Conceptos, procedimientos y resultados.
El campo de resolución de problemas es muy amplio y debe formar parte de cada tema y cada curso como materia transversal. En este apartado más específico y para centrar el tema se han seleccionado 8 estrategias concretas. Las estrategias seleccionadas son:

1. Codificación adecuada.
2. Visualización gráfica.
3. Modificación del problema.
4. Empezar por el final.
5. Particularizar y generalizar.
6. Conjeturar.
7. El principio de inducción.
8. Reducción al absurdo.

Algunas observaciones y orientaciones de carácter metodológico y de contenido:

- ✓ En la prueba entrará, como máximo, un problema relativo a la aplicación de alguna de las estrategias citadas anteriormente y en un nivel de dificultad mínimo.

- ✓ En este apartado podrán incluirse los problemas de planteamiento de carácter algebraico relativos a sistemas de ecuaciones lineales del bloque de Álgebra.

- ✓ En este apartado podrán incluirse también situaciones derivadas de los demás bloques de contenido(Álgebra, Geometría y Análisis)

Notas:

1) Es importante que la resolución de problemas se trabaje en los cursos previos, y en general debe formar parte del desarrollo de las matemáticas de todo el bachillerato.

ÁLGEBRA. 6 semanas

Objetivos. Los alumnos deben ser capaces de:

- Utilizar el cálculo matricial y conocer sus propiedades y aplicaciones.
- Calcular determinantes y conocer sus propiedades y aplicaciones.
- Estudiar y resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Plantear y resolver problemas de carácter algebraico.

Conceptos, procedimientos y resultados.

Las principales nociones, métodos y resultados teóricos para conseguir los objetivos anteriores son los siguientes:

- Operaciones con matrices. Propiedades.
- Determinantes. Propiedades y cálculo.
- Rango de una matriz y cálculo del mismo.
- Sistemas: equivalencia, compatibilidad y resolución.
- Relación entre el rango de una matriz y los determinantes.
- Cálculo de la matriz inversa.
- Nociones de dependencia de filas y columnas.
- Resolución de sistemas:
    a) Método de Gauss.
    b) Teorema dc Rouche-Frobenius.
    c) Regla de Cramer.

Algunas observaciones y orientaciones de carácter metodológico y de contenido:

- ✓ En el producto de matrices es importante resaltar la falta de conmutatividad.

- ✓ En el apartado de los determinantes una opción puede consistir en presentar los determinantes dos por dos por su definición y los de orden tres por tres mediante la regla de Sarrus y hacer algún cálculo de orden mayor mediante el desarrollo por filas o columnas.

- ✓ Es importante insistir en las propiedades y en los cambios que se producen en los determinantes al operar con filas y columnas, y de forma análoga, las operaciones de filas y columnas que no alteran el rango de una matriz.

- ✓ Las nociones de dependencia e independencia entre filas y columnas son de interés tanto para este apartado como para el siguiente relativo a la geometría.

- ✓ El método de Gauss y el teorema de Rouche-Frobenius son dos alternativas para el estudio y resolución de los sistemas. En cualquier caso, se considera que la utilización de los enunciados de dichas condiciones de compatibilidad de sistemas y su uso en la resolución de los mismos son uno de los objetivos básicos de este bloque.

- ✓ Los ejercicios de sistemas se limitarán a un orden máximo de cuatro por cuatro.

- ✓ En el caso de que lleven parámetros se limitarán a sistemas con dos incógnitas si llevan dos parámetros y a un parámetro en el resto de casos, procurando que la condición que deba cumplir el parámetro resulte de ecuaciones de grado uno o dos.

- ✓ En el caso de la regla de Cramer los ejercicios se limitarán al orden tres por tres como máximo.

- ✓ El cálculo de determinantes puede limitarse a los de orden cuatro. El estudio del rango de matrices numéricas se limitará a las de orden cuatro por cuatro.

Notas:

1) Es importante que en cursos previos se haya visto la noción de solución de un sistema y la resolución efectiva mediante los métodos de sustitución, igualación, y reducción (al menos para sistemas con dos incógnitas)
2) El planteamiento de problemas contextualizados de carácter algebraico puede incorporarse a la sección de resolución de problemas.

GEOMETRÍA 5 semanas

Objetivos. Los alumnos deben ser capaces de:

- Usar coordenadas y sistemas de referencia espaciales.
- Utilizar el cálculo vectorial, sus propiedades y aplicaciones.
- Relacionar las ecuaciones con los objetos geométricos asociados.
- Estudiar las posiciones relativas de rectas y planos en el espacio.
- Resolver problemas de carácter métrico

Conceptos, procedimientos y resultados.
Las principales nociones, métodos y resultados teóricos para conseguir los objetivos anteriores son los siguientes:

- Sistemas de referencia y coordenadas. Vectores.
- Operaciones con vectores y propiedades. Expresión analítica.
- Ecuación de la recta en el espacio. Posición relativa de dos rectas.
- Ecuación del plano en el espacio. Posiciones relativas de puntos, rectas y planos.
- Problemas métricos en el espacio: Ángulos entre rectas y planos. Distancias entre puntos, rectas y planos.

Algunas observaciones y orientaciones de carácter metodológico y de contenido:

- ✓ La geometría de este curso se centra en la geometría del espacio tridimensional.
- ✓ Las diversas expresiones para la ecuación de rectas y planos y sus interpretaciones desde el punto de vista algebraico y vectorial son importantes, ya que en la mayoría de los problemas la elección de la forma adecuada de la ecuación reduce notablemente su dificultad.
- ✓ La parte geométrica del programa usa la riqueza de elementos del espacio euclídeo tridimensional para relacionar la parte métrica (producto escalar y producto vectorial) con la algebraica (posiciones relativas a través de los sistemas).
- ✓ Es importante, por ello, resaltar la variedad de lenguajes que conviven en los aspectos geométricos tratados y la interconexión con los conceptos algebraicos del tema anterior.
- ✓ Los aspectos métricos se limitarán en los ejercicios a los de un carácter más elemental y se evitarán aquellos que requieran operaciones demasiado complicadas.
- ✓ Los ejercicios que se propongan para la prueba de acceso y que impliquen la resolución de sistemas, tendrán unas limitaciones del mismo tipo que las referentes a las citadas para sistemas en el apartado de algebra en cuanto a los parámetros se refiere.

Notas:

1) Es importante que en los cursos previos los alumnos hayan estudiado el significado de las coordenadas, los sistemas de referencia y el cálculo vectorial en el plano.

ANÁLISIS. 10 semanas

Objetivos. Los alumnos deben ser capaces de:

- Conocer y usar la definición y propiedades del límite funcional
- Conocer y usar la definición, propiedades e interpretación de la derivada.
- Hallar las derivadas de algunas funciones elementales.
- Conocer y usar los principales resultados sobre derivación.
- Aplicar las derivadas al estudio de funciones, desigualdades y optimización.
- Manejar algunos métodos de integración para el cálculo de primitivas.
- Conocer y utilizar la relación entre la integral definida y la primitiva.
- Aplicar la integral definida para el cálculo de áreas de recintos.

Conceptos, procedimientos y resultados.
Las principales nociones, métodos y resultados teóricos para conseguir los objetivos anteriores son los siguientes:

- Límite de una función en un punto
- Límites infinitos y en el infinito: Asíntotas
- Indeterminaciones y su cálculo.
- Noción de continuidad de una función. Tipos de discontinuidades
- Cocientes incrementales y derivada. Interpretación geométrica y recta tangente.
- La función derivada. Propiedades de la derivación: suma, producto, y cociente.
- Regla de la cadena y consecuencias: función inversa y derivación logarítmica.
- Resultados principales sobre la derivada: el teorema del valor medio.
- La regla de L' Hopital. Resolución de indeterminaciones.
- Aplicaciones: crecimiento, criterio de la primera derivada, criterio de la segunda derivada.
- Representación de funciones.
- Problemas de optimización.
- Noción de primitiva.
- Métodos de integración: Sustitución, integración por partes, integrales racionales, integrales trigonométricas.
- Sumas inferiores y superiores. Integral definida y su interpretación geométrica.
- La fórmula de Barrow. Aplicaciones de la integral definida al cálculo de áreas de recintos planos.

Algunas observaciones y orientaciones de carácter metodológico y de contenido:

- ✓ El apartado de límites, debe centrarse en la noción de límite de una función en un punto y los límites infinitos y en el infinito para fundamentar el tratamiento de la derivada, a través de los cocientes incrementales y el cálculo de asíntotas.

- ✓ Debe resaltarse el hecho de que la derivabilidad implica la continuidad (mientras que el recíproco no es cierto, presentando algún contraejemplo)

- ✓ Del teorema del valor medio debería darse al menos un esquema de su demostración y su interpretación geométrica.

- ✓ Los criterios de la derivada primera y la segunda forman la base para las aplicaciones a la optimización.

- ✓ En el apartado de representación de funciones, se debería utilizar algún asistente matemático (Geogebra, Cabri, Derive, etc.) para reforzar aspectos que de otro modo nos pueden llevar mucho tiempo.

- ✓ La regla de L' Hopital debe presentarse como un instrumento importante para la resolución de indeterminaciones insistiendo en los ejercicios en las condiciones de aplicabilidad (pero sin demostración).

- ✓ Los métodos de integración elemental se limitarán (en cuanto a los ejercicios propuestos) a los siguientes:

a) Cambios de variable muy sencillos y directos.
b) Integración por partes: funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas y algún producto de las mismas.
c) Funciones racionales: denominadores con grado menor o igual que tres.
d) Funciones trigonométricas: aquellas que puedan resolverse mediante un cambio de variable o integración por partes.

- ✓ La integral definida puede presentarse mediante la noción de suma inferior y superior y de esta forma aparece de forma natural su conexión con el área de las figuras planas que va a ser su principal aplicación.

- ✓ Algunos ejercicios sencillos sobre sumas inferiores y superiores pueden proponerse como aplicación de la integral para obtener desigualdades y para reforzar la comprensión de los conceptos.

- ✓ La fórmula de Barrow proporciona la conexión entre la integral definida, las primitivas y el cálculo diferencial y forma la base de las aplicaciones más importantes de la integral.

Notas

1) Deben incluirse en el primer curso un tratamiento básico de las propiedades globales de algunas gráficas básicas como: $y = x^n; y = \sqrt{x}; y = e^x; y = \ln x$
2) La trigonometría debe trabajarse a lo largo del primer curso, dando importancia al aspecto funcional y aplicativo.
3) Nos parece fundamental el uso, en el aula, de asistentes matemáticos de cara a comprender mejor ciertos contenidos relacionados con el campo funcional.
4) No entrarán, al menos en la prueba de acceso, la integración de funciones irracionales ni las trigonométricas racionales.